A. Réponses harmoniques des systèmes

A.I. Fonction de transfert complexe d'un système

A.I.1 Utilité

La fonction de transfert complexe d'un système est utile lors de l'étude des réponses du système à une entrée harmonique (sinusoïdale).

Soit le système représenté par la fonction de transfert $H(p)$.

La fonction de transfert complexe est la fonction de transfert dans laquelle on remplace p par $j\omega$, j étant le nombre imaginaire tel que $j^2 = -1$ et ω la pulsation du signal d'entrée $(rd.s^{-1})$:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

f fréquence du signal d'entrée (s^{-1})

T période du signal d'entrée (s)

La fonction de transfert complexe du système s'écrit donc $H(j\omega)$

Soit le signal d'entrée temporel $e(t)$ sinusoïdal d'amplitude e_0 et de pulsation ω :

$$e(t) = e_0 \sin \omega t$$

En supposant que l'on a atteint un régime établi (réponse transitoire passée), on démontre que le signal de sortie du système est de la forme :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

φ en radians

Le signal de sortie

- a la même pulsation que le signal d'entrée
- présente une amplitude s_0 différente de celle du signal d'entrée e_0
- présente un déphasage $\varphi < 0$ tel que le décalage temporel t_φ entre entrée et sortie soit égal à :

$$s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi) = s_0 \sin\left(\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right) = s_0 \sin\left(\omega\left(t + t_\varphi\right)\right) = \frac{s_0}{e_0} e\left(t + t_\varphi\right)$$

$$t_\varphi = \frac{\varphi}{\omega} < 0 \quad \Rightarrow \quad Décalage\ temporel\ "vers\ la\ droite"\ entre\ entrée\ et\ sortie = Retard$$

Remarque : pour tous les systèmes réels (hors correcteurs), la phase ne peut être que négative. En effet, le signal de sortie ne peut sortir avant que le signal d'entrée ne soit entré.

Les valeurs de s_0 et φ dépendent de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$.

En effet :

$$\begin{cases} s_0 = |H(j\omega)|e_0 \\ \varphi = \arg\big(H(j\omega)\big) \end{cases}$$

La connaissance de la fonction de transfert complexe d'un système permet de connaître très simplement sa réponse à une entrée harmonique.

Détails de la démarche (à approfondir en physique et/ou maths):

- On suppose une entrée imaginaire : $\underline{e}(t) = e_0 e^{j\omega t} = e_0 \cos\omega t + je_0 \sin\omega t$
- $e(t) = Im\left(\underline{e}(t)\right)$
- On montre que $\underline{s}(t) = H(j\omega)\underline{e}(t) = |H(j\omega)|e^{j\varphi} e_0 e^{j\omega t} = e_0|H(j\omega)|e^{j(\omega t+\varphi)} = s_0 e^{j(\omega t+\varphi)}$
- Finalement : $s(t) = Im\left(\underline{s}(t)\right) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$

Remarque : même démarche pour une entrée en $\cos(\omega t)$ avec une partie réelle

A.I.2 Représentations

Modules et arguments d'une fonction de transfert complexe sont représentés graphiquement selon trois types de représentation :

- diagrammes de Bode
- diagramme de Nyquist
- diagramme de Black

On parle de lieu de transfert.

Dans tous les cas, ils permettent de déterminer graphiquement et simplement le comportement du système en fonction de la pulsation du signal d'entrée, et de déterminer des valeurs de gain et phase pour des pulsations particulières.

A.I.2.a Diagrammes de Bode

A.I.2.a.i Diagrammes

On représente graphiquement deux courbes :

$$G = 20\log|H(j\omega)| \quad ; \quad \varphi = \arg H(j\omega)$$

L'abscisse est la pulsation ω, représentée en échelle logarithmique.

Généralement, on réalise les tracés asymptotiques des courbes des systèmes et on place quelques points particuliers. Nous développerons ce point plus tard pour les systèmes du 1° et du 2° ordre.

G est un gain exprimé en décibels. On le note généralement G_{db}.

- Lorsque le gain vaut 0, $H(j\omega) = 1$, la sortie n'est ni amplifiée, ni atténuée car $s_0 = e_0$
- Si $G_{db} > 0$, le système amplifie l'entrée
- Si $G_{db} < 0$, le système atténue l'entrée

Le diagramme de Bode est un tracé dont l'abscisse est une pulsation. Il faut bien identifier ce que cela veut dire. Ce tracé va permettre de savoir comment seront l'amplitude et la phase (le déphasage) d'une réponse d'un système à une entrée harmonique en fonction de la pulsation du signal d'entrée.

Exemple : un haut-parleur laisse-t-il passer les hautes ou les basses fréquences ? Connaissant le gain en fonction de la pulsation en entrée, il suffit d'identifier la plage de pulsations où le gain est négatif pour conclure que sur cette plage, il atténue les signaux d'entrée et ne les laisse donc pas passer : il les filtre.

Remarque : Le tracé du lieu de transfert d'un produit de deux fonctions de transfert est obtenu simplement sur un diagramme de Bode par addition :

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)$$

$$G_{db} = 20\log|H(j\omega)| = 20\log|H_1(j\omega)H_2(j\omega)| = 20\log|H_1(j\omega)| + 20\log|H_2(j\omega)|$$

$$G_{db} = {G_1}_{db} + {G_2}_{db}$$

$$\arg H(j\omega) = \arg\big(H_1(j\omega)H_2(j\omega)\big) = \arg\big(H_1(j\omega)\big) + \arg\big(H_2(j\omega)\big)$$

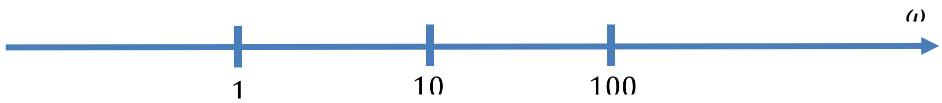
Le diagramme de Bode est la représentation la plus utilisée industriellement, car elle permet une analyse rapide des propriétés et des effets des corrections éventuelles.

A.I.2.a.ii Echelle logarithmique

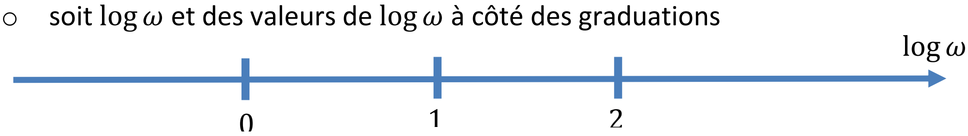
On représente la pulsation ω sur l'axe des abscisses en échelle logarithmique. Il faut savoir quelques détails concernant cette représentation :

$$\boxed{\log 10^n = n}$$

- La fonction log « compte les zéros » des puissances de 10 :
  $$\log 1 = 0\,;\ \log 10 = 1\,;\ \log 100 = 2$$
- Pour la représentation logarithmique en abscisse, on écrit au bout de l'axe
  - soit ω et des valeurs de ω à côté des graduations

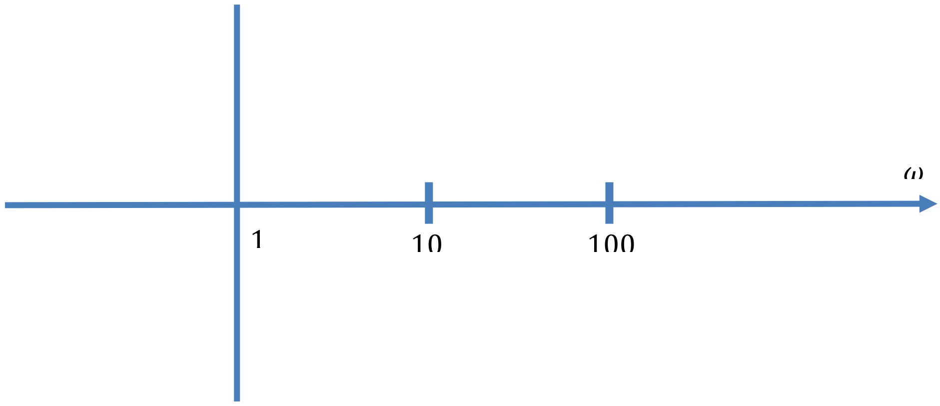


  - soit $\log\omega$ et des valeurs de $\log\omega$ à côté des graduations

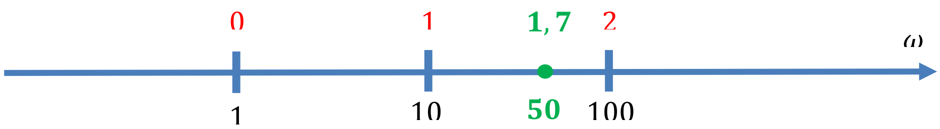


  - Cependant, il arrive qu'un mix soit fait mais c'est à éviter

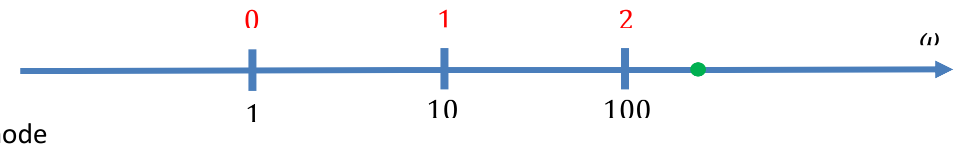
- On peut placer l'axe des ordonnées où l'on veut ($\omega = 0$ se trouve en l'abscisse $-\infty$…):



- L'échelle étant logarithmique, il faut savoir placer n'importe quelle valeur ω :
  Pour placer $\omega = 50$, il suffit de calculer $\log 50 = 1{,}7$



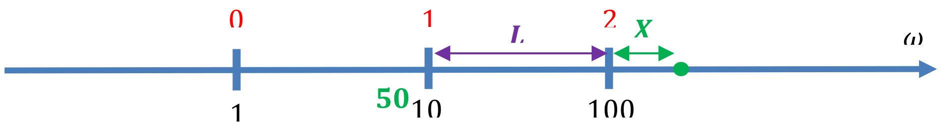
- Il faut savoir déterminer la pulsation en un point donné :



Méthode

- On mesure la longueur d'une décade L
- On mesure de la distance X entre un point connu tel que $\alpha = \log \omega_i$ et le point recherché tel que $\beta = \log \omega$
- On calcul le rapport $k = \frac{X}{L}$
- On pose la variable signe $S = \begin{cases} S = 1 \; si \; \beta > \alpha \\ S = -1 \; si \; \beta < \alpha \end{cases}$
- Alors : $\beta = \alpha + Sk$
- Donc : $\omega = 10^{\beta}$

Application



On a alors :

$$\alpha = 2 \quad ; \quad S = 1 \quad ; \quad k = \frac{X}{L} = 0{,}35 \quad ; \quad \beta = 2{,}35 \quad ; \quad \omega = 10^{2,35} = 224 \, rd.s^{-1}$$

A.I.2.b Diagramme de Nyquist

Ce diagramme représente le nombre complexe $H(j\omega) = \boldsymbol{Re(H(j\omega))} + j\boldsymbol{Im(H(j\omega))}$ dans le plan complexe. Le lieu de Nyquist, gradué en ω, est la représentation la plus utilisée par les universitaires.

A.I.2.c Représentation de Black (ou Black-Nickols)

C'est une représentation paramétrique en fonction de ω :

- Abscisse : phase $\boldsymbol{\varphi}$ en degrés
- Ordonnée : gain $\boldsymbol{G_{dB}}$

Tout comme pour les diagrammes de Bode, le lieu de Black s'obtient facilement lorsque la fonction de transfert est égale au produit de deux ou plusieurs fonctions.

L'intérêt de la représentation de Black est de pouvoir obtenir, à partir du tracé de la FTBO, les propriétés de la FTBF, et en permettre ainsi un réglage assez facile.